

Varianta 100

Subiectul I

- a) $z = 7 - i$.
- b) $m = 2$ și $n = -3$.
- c) $S_{MNP} = 2$.
- d) $a = 1$.
- e) $\sin(x + 2\pi) = 0,4$.
- f) $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Subiectul II

1.

- a) Deci $A(1,2)$ se află pe graficul funcției f .
- b) $x_1 = 8$ și $x_2 = 27$.
- c) $x = 4$.
- d) Probabilitatea este $\frac{2}{20} = 0,1$.
- e) $C_7^1 + C_7^2 = 28$.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$.
- c) $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{6x^2 + 1} = \frac{1}{2}$.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{31}{4}$.

Subiectul III

- a) $\det A = 0$.
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.
- c) $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B + 2I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deci $B^2 = B + 2I_2$.
- d) $C = A + B = 2I_2; C^2 = (2I_2)^2 = 2^2 I_2^2 = 2^2 I_2$.

e) Notăm cu $P(k)$: $C^n = 2^n I_2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(1)$: $C^1 = 2I_2$, adevărat.

Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm că $P(k)$ este propoziție adevărată.

Deci $C^k = 2^k I_2$. Atunci $C^{k+1} = C^k \cdot C = 2^k I_2 \cdot C = 2^k C = 2^k \cdot 2I_2 = 2^{k+1} I_2$.

Prin urmare $P(k+1)$ este propoziție adevărată.

Folosind metoda inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad X &= C + C^2 + C^3 + \dots + C^{2007} = 2I_2 + 2^2 I_2 + 2^3 I_2 + \dots + 2^{2007} I_2 = \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2007}) I_2 = 2 \cdot \frac{2^{2007} - 1}{2 - 1} I_2 = (2^{2008} - 2) I_2. \end{aligned}$$

$$\text{g)} \quad \det X = \begin{vmatrix} 2^{2008} - 2 & 0 \\ 0 & 2^{2008} - 2 \end{vmatrix} = (2^{2008} - 2)^2 = 4 \cdot (2^{2007} - 1)^2.$$

Rezultă că numărul $\det(X)$ se împarte exact la 4, deci restul este zero.

Subiectul IV

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = f(x).$$

$$\text{b)} \quad f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{c)} \quad f'(x) = \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)' = \frac{-(2x+1)}{x^2(x+1)^2}, \quad x > 0.$$

$$\text{d)} \quad f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} < 0, \forall x > 0, \text{ deci funcția } f \text{ este descrescătoare pe } (0, \infty).$$

$$\text{e)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \infty. \text{ Deci ecuația asimptotei verticale este: } x = 0.$$

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

$$\text{g)} \quad \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^n = \ln n - \ln(n+1) + \ln 2 = \ln \frac{2n}{n+1}.$$

$$\text{Atunci: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2n}{n+1}\right) = \ln 2.$$